

**EL FILTRO DE CICLO-TENDENCIA UTILIZADO EN LA
CONTABILIDAD NACIONAL TRIMESTRAL FRENTE A LOS
FILTROS BASADOS EN MODELOS⁽¹⁾**

Víctor Gómez^{}*
*Pilar Bengoechea^{**}*

D-98004

Febrero 1998

^(*) Ministerio de Economía y Hacienda

^(**) Ministerio de Industria y Energía

⁽¹⁾ Los autores agradecen a Ana Abad, Alfredo Cristóbal y Enrique M. Quilis, del Instituto Nacional de Estadística, que les proporcionaran un programa escrito en Basic que permite la aplicación del filtro de la Contabilidad Nacional Trimestral a series temporales. Este programa, junto con los programas TRAMO y SEATS, que se mencionarán más adelante, son los que se han utilizado para hacer todos los cálculos de la parte práctica del trabajo.

Los documentos de trabajo de la Dirección General de Análisis y Programación Presupuestaria no representan opiniones oficiales del Ministerio de Economía y Hacienda ni en este caso los del Ministerio de Industria y Energía. Los análisis, opiniones y conclusiones aquí expuestos son los de los autores, con los que no tiene que coincidir, la DGAPP. Ésta considera, sin embargo, interesante la difusión del trabajo para que los comentarios y críticas que suscite contribuyan a mejorar su calidad.

1. The first part of the document is a list of names and addresses, including "Mr. J. H. Smith, 123 Main St., New York, N. Y." and "Mrs. A. B. Jones, 456 Elm St., Boston, Mass."

2. The second part of the document is a list of names and addresses, including "Mr. C. D. Brown, 789 Oak St., Chicago, Ill." and "Mrs. E. F. Green, 1011 Pine St., Philadelphia, Pa."

Resumen

En este trabajo se analiza primero el filtro de ciclo-tendencia utilizado en la contabilidad nacional trimestral (CNT), dándose una fórmula para el primer componente del filtro que corrige un error en la expresión que se ha utilizado en la CNT desde el principio. Después, se comparan los resultados obtenidos con este filtro con los que se obtienen al utilizar el filtro de ciclo-tendencia dado por los programas TRAMO y SEATS, que utilizan una metodología basada en modelos. Se concluye que el filtro de la CNT presenta algunos problemas, como la aparición de ciclos espurios y desfase temporal, condiciones iniciales no eficientes y mayores errores de estimación, que no surgen cuando se utilizan filtros basados en modelos. Para el caso en que las series de ciclo-tendencia obtenidas con filtros basados en modelos sean algo volátiles y se quieran suavizar un poco, se propone la aplicación de un filtro de Hodrick-Prescott sobre dichas series. De esta forma, se pueden obtener señales suaves sin temor a inducir ciclos espurios.

1 Introducción

La contabilidad nacional trimestral (CNT de ahora en adelante) se presentó en 1992. El sistema español es en su mayor parte de los basados en indicadores, es decir, no consiste en replicar el esquema de la contabilidad anual con periodicidad trimestral, sino que, debido a la falta de información estadística, se utilizan una serie de indicadores trimestrales para desagregar los agregados contables anuales en sus correspondientes valores trimestrales mediante un método de desagregación temporal.

El método de desagregación utilizado por la CNT es el de Chow y Lin (1971), que se aplica no directamente sobre los indicadores, sino sobre los componentes de ciclo-tendencia de éstos. A su vez, los componentes de ciclo-tendencia se obtienen mediante la aplicación de un filtro fijo a los indicadores. Este filtro, que es sobre el que centraremos nuestra atención en este trabajo, tiene su origen en un documento interno del Instituto Nacional de Estadística (INE), ver Gómez y Melis (1989), y ha sido denominado "filtro de líneas aéreas modificado" o, más brevemente, LAM por los autores.

La metodología de la CNT está ampliamente documentada y divulgada, siendo las referencias básicas INE (1992, 1993 y 1995). En concreto, la última versión del filtro LAM utilizado en la CNT está descrita en INE (1995).

Para la elaboración de la CNT se optó por utilizar series de ciclo-tendencia de los indicadores en lugar de series desestacionalizadas, argumentando que las series desestacionalizadas son simplemente las de "ciclo-tendencia contaminadas por la irregularidad", ver INE (1995). A pesar de que este argumento no está exento de riesgos, ya que las series de ciclo-tendencia suelen estar sujetas a mayores revisiones que las series desestacionalizadas, se decidió también utilizar un filtro propio de extracción del ciclo-tendencia en lugar de utilizar el procedimiento X11-ARIMA. La razón dada para justificar la aplicación de este filtro propio fué que el X11-ARIMA "constituye una herramienta inadecuada para extraer la señal de ciclo-tendencia de una serie debido a las deficiencias de sus filtros (especialmente el de Henderson), a su elevado coste informativo, a la inflexibilidad de sus procedimientos y a su opacidad estadística", ver INE (1995).

El filtro LAM es un filtro ARMA causal, es decir, es un cociente de polinomios en el operador de retardos. Por tanto, el filtro tiene cola infinita unilateral (hacia atrás) y se aplica sólo a las observaciones presentes o pasadas de la serie a filtrar. Esto implica que la salida del filtro tiene un desfase

respecto de la entrada. Este desfase se cuantifica en seis observaciones, ver INE (1995). En consecuencia, hay que desplazar la serie filtrada y hacen falta seis predicciones para poder obtener tantas estimaciones como observaciones tiene la serie original. Seis es también el número máximo de revisiones a las que están sometidas las series de ciclo-tendencia obtenidas con el LAM. Como se verá en el epígrafe 2, esto no quiere decir que las estimaciones definitivas no estén sujetas a error. Todo lo contrario, las estimaciones definitivas están sujetas a un error mayor que las obtenidas con un método basado en modelos.

Hay que hacer notar que la adopción del LAM para obtener el componente de ciclo-tendencia no evita el uso de modelos, debido a que se necesita un modelo para obtener las seis predicciones que se utilizan para corregir el desfase del filtro.

Dado que la CNT es un instrumento muy importante para aquellos que siguen la evolución de la economía española, tiene gran interés saber el grado de fiabilidad de los resultados que ofrece el INE. Uno de los objetivos de este trabajo consiste en estudiar desde el punto de vista estadístico la idoneidad del procedimiento de extracción del ciclo-tendencia utilizado en la elaboración de la CNT. En este sentido, se demuestra en este trabajo que la fórmula utilizada por el INE para obtener el filtro LAM contiene un error, si bien dicho error no parece que afecte mucho a los resultados cuando las series tratadas son mensuales. Sin embargo, el aspecto más problemático de la utilización del LAM lo constituye el hecho de que, al ser un filtro fijo, su aplicación a series para las cuales no es adecuado producirá efectos indeseables, como la aparición de ciclos espurios.

En este trabajo demostramos que gran parte de los argumentos del INE para rechazar el procedimiento X11-ARIMA no sólo siguen siendo válidos para el filtro LAM, sino que además aparecen nuevos problemas. En efecto, a pesar de que el INE considera deficientes las medias de Henderson, el componente del LAM que hace las veces de estos filtros tiene una función de ganancia muy parecida a la de una media de Henderson de 23 términos. Además, el filtro LAM es menos flexible que el X11-ARIMA, ya que este último elige el tamaño de las medias de Henderson en función del cociente señal/ruido, mientras que el primero siempre aplica el mismo filtro. Otros problemas del LAM son la imposibilidad de hacer inferencia, el desfase temporal no constante, mayores errores en las estimaciones definitivas que con un método basado en modelos, no cumple la propiedad de idempotencia y el problema

de las condiciones iniciales. Por esta razón, creemos que sería más correcto utilizar un procedimiento basado en modelos, como el implementado en los programas TRAMO y SEATS¹, que se pueden obtener, junto con el manual de usuario (Gómez y Maravall, 1996), en la dirección de Internet

<http://www.bde.es>

Además de apoyar nuestra tesis con argumentos teóricos, mostramos numerosos ejemplos que la avalan provenientes de series simuladas y series reales de la economía.

Los programas TRAMO y SEATS permiten evitar muchos de los problemas del nuevo programa X12-ARIMA, de la Oficina del Censo de los EE.UU., y tienen el potencial de competir con este último, ya que permiten hacer modelización automática, tratamiento automático de observaciones atípicas, contrastes previos de transformación logarítmica, efecto de Día Laborable, efecto de Pascua, etc. Además, se pueden utilizar eficientemente para tratar de forma rutinaria un gran número de series, como se hace actualmente en, por ejemplo, EUROSTAT.

No se considera en este trabajo el método X12-ARIMA, porque en realidad se trata del antiguo programa X11 junto con el nuevo programa de preprocesamiento REGARIMA, cuyas funciones son análogas a las de TRAMO. La parte de extracción de señal de X12-ARIMA es igual a la de X11, con algunos nuevos diagnósticos y algunas nuevas opciones para los filtros. La no idoneidad de los filtros de X11 ha sido ampliamente divulgada en la literatura y es debida a sus filtros fijos, que, como es bien sabido, producen efectos indeseables en aquellas series que se apartan del modelo para el cual el procedimiento es óptimo.

Tampoco se consideran otros programas de extracción de señal, como el programa STAMP, que desarrolla la metodología de modelos estructurales de Harvey, el método de Berlín, desarrollado por la Oficina de Estadística de Alemania, o el SABL de los Bell Laboratories. Aparte de existir problemas evidentes de espacio para incluir todos estos métodos, el ámbito de aplicación de todos estos programas en Oficinas de Estadística y Bancos Centrales es muy reducido.

Dos de los argumentos más utilizados en contra de los métodos basados en modelos, los de que es necesario un experto en series temporales para

¹TRAMO y SEATS son dos programas desarrollados por Víctor Gómez y Agustín Maravall para el tratamiento de series temporales.

modelizar las series a tratar y que los métodos basados en modelos requieren mucho tiempo de cálculo computacional, han sido dejados sin efecto por la aparición de los programas TRAMO y SEATS. La utilización de estos programas para obtener las series de ciclo-tendencia es más sencilla, más rápida, y, como se comprueba en este trabajo, produce mejores resultados, que el procedimiento utilizado en la elaboración de la CNT. Esto es debido a que TRAMO permite primero hacer una modelización automática en presencia de observaciones atípicas y corregir la serie de efectos deterministas. Después, la serie corregida de todos estos efectos es pasada a SEATS para realizar la descomposición en componentes no observables ortogonales. Estos componentes se estiman óptimamente (en el sentido de los mínimos cuadrados) mediante filtros simétricos que se adaptan a las características de la serie. La metodología basada en modelos tiene una base teórica sólida y permite hacer inferencia, cosa que no es posible con el filtro LAM. Finalmente, aunque la utilización del filtro LAM es muy sencilla, el procedimiento necesita un tratamiento con modelos para obtener predicciones y quizás corregir de observaciones atípicas y efectos de Día Laborable o Pascua. Dado que hay que utilizar varios paquetes de software y que se requiere la intervención de algún experto en series temporales, el procedimiento en su conjunto no es ni tan rápido ni tan completo.

Como el componente de ciclo-tendencia estimado por TRAMO y SEATS depende de las características de la serie, puede darse el caso en que dicho componente estimado no sea todo lo suave que el usuario desearía. Si se desea suavizar la serie de ciclo-tendencia obtenida con TRAMO/SEATS, en este trabajo se propone aplicar a dicho ciclo-tendencia un filtro de Hodrick-Prescott, donde el valor de λ se puede elegir en función del grado de suavizado que se desee. Es muy importante resaltar que este filtro de Hodrick-Prescott es un filtro fijo que se aplica a la serie de ciclo-tendencia obtenida con el método basado en modelos. De esta manera se evita la creación de ciclos espurios, ya que el producto de los dos filtros respetará las propiedades de la serie. Por ejemplo, si la serie de entrada es un ruido blanco, el filtro de TRAMO/SEATS será cero y el producto también, por lo que se evita una mala utilización del filtro fijo. Se demuestra que se puede elegir λ de forma que el filtro resultante tenga características frecuenciales similares a las del autorregresivo de orden dos propuesto por Melis (1989), de potencia mitad en $2\pi/20$. Sin embargo, al contrario que este último, no tiene problemas de condiciones iniciales, no tiene problemas de desfase, la señal obtenida es más

suave, y, al aplicarse al ciclo-tendencia obtenido con el método basado en modelos, no produce ciclos espurios.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera. En el epígrafe dos, se hace una breve descripción de los filtros basados en modelos y del filtro LAM y se mencionan algunos de los riesgos de utilizar estimaciones de ciclo-tendencia obtenidas con un filtro fijo como el LAM. También se describe brevemente un procedimiento para obtener el estimador de ciclo-tendencia mediante el filtro de Wiener-Kolmogov cuando la serie sigue un modelo de líneas aéreas, que corrige los errores en las fórmulas utilizadas por Melis (1992). En el epígrafe tres, se describe el filtro de Hodrick-Prescott propuesto para suavizar series de ciclo-tendencia obtenidas con TRAMO/SEATS. En el epígrafe cuatro, se ilustran algunos de los problemas del filtro LAM mediante su aplicación a varias series económicas y se comparan los resultados con los obtenidos con TRAMO/SEATS. Finalmente, en el epígrafe cinco se recogen las conclusiones y se resumen las ventajas de la metodología propuesta.

2 Breve Descripción de los Filtros Basados en Modelos y del Filtro Lam

Descomposición Basada en Modelos

El método basado en modelos al que nos referimos en este trabajo construye modelos para los distintos componentes a partir del modelo que se ha especificado para la serie.

Supongamos que la serie observada $\{z_t\}$ sigue un modelo ARIMA invertible

$$z_t = \theta_z(B)a_t,$$

donde B es el operador de retardos, $B^j z_t = z_{t-j}$, $\theta_z(B)$ es un polinomio en B que puede contener raíces unitarias y $\{a_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $N(0, \sigma_a^2)$, y que se hace la hipótesis habitual de descomposición en componentes no observables ortogonales

$$z_t = p_t + s_t + w_t,$$

donde p_t es el ciclo-tendencia, s_t es el componente estacional y w_t es el componente irregular. La descomposición puede ser de hecho aditiva o multiplica-

tiva, pero como la segunda se transforma en la primera tomando logaritmos, supondremos en todo lo que sigue que la descomposición es aditiva.

Se supone que los componentes siguen también modelos ARIMA, que vienen determinados por el polinomio autorregresivo $\phi_z(B)$ y, en especial, la parte de raíces unitarias. Esto es así porque a cada raíz unitaria en $\phi_z(B)$ corresponde un pico infinito en el pseudoespectro de la serie. Por ejemplo, si la serie es trimestral y tiene una diferencia estacional $\nabla_4 = (1 - B)(1 + B + B^2 + B^3)$ en $\phi_z(B)$, el factor $1 - B$ induce un pico infinito en la frecuencia cero y el otro factor $1 + B + B^2 + B^3$ picos infinitos en las frecuencias estacionales.

Sin embargo, la asignación de las distintas raíces de $\phi_z(B)$ no es suficiente para identificar los modelos de los componentes. La identificación se consigue mediante la imposición de ciertas restricciones en los órdenes de las medias móviles y del llamado requisito "canónico", que consiste en eliminar de los componentes p_t y s_t todo el ruido blanco posible y asignárselo al componente irregular w_t . De esta forma, se maximiza la varianza de este último y, por el contrario, los componentes estacional y de ciclo-tendencia se hacen tan estables como sea posible.

Por ejemplo, en el caso del modelo de líneas aéreas

$$\nabla \nabla_s z_t = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^s) a_t, \quad (1)$$

donde $\nabla = 1 - B$, $\nabla_s = 1 - B^s$ y s es el número de observaciones por año, la aplicación de este método conduce a los siguientes modelos para los componentes

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_t &= (1 + \alpha B)(1 + B) b_t \\ S(B) s_t &= \theta_s(B) c_t, \end{aligned}$$

donde $S(B) = 1 + B + \dots + B^{s-1}$ y $\theta_s(B)$ es un polinomio de medias móviles de orden $s - 1$ no invertible. Ver Maravall (1987).

Cuando la serie es estacionaria y se dispone de una realización del proceso $\{\dots, z_{t-1}, z_t, z_{t+1}, \dots\}$, los filtros de Wiener-Kolmogorov que definen los estimadores óptimos de los componentes vienen dados por el cociente entre la función generatriz de covarianzas del componente y la de la serie. Según los resultados de Bell (1984), se puede aplicar el filtro de Wiener-Kolmogorov también en el caso no estacionario. Por tanto, si consideramos

el componente de ciclo-tendencia, que es el que más nos interesa en este trabajo, y suponemos que el modelo para p_t que se deduce de la descomposición canónica es

$$\phi_p(B)p_t = \theta_p(B)b_t,$$

el estimador \hat{p}_t de p_t correspondiente a la muestra infinita viene dado por $\hat{p}_t = H(B)H(F)z_t$, donde F es el operador de adelanto, $F^j z_t = z_{t+j}$, $H(B)H(F)$ es el filtro de Wiener-Kolmogorov,

$$H(B) = \frac{\sigma_b \theta_p(B) \phi_z(B)}{\sigma_a \phi_p(B) \theta_z(B)},$$

y $\sigma_b^2 = \text{Var}(b_t)$.

Para el ejemplo del modelo de líneas aéreas, después de algunas manipulaciones, se obtiene

$$H(B) = \frac{\sigma_b (1 + \alpha B)(1 + B)S(B)}{\sigma_a (1 + \theta B)(1 + \Theta B^s)}. \quad (2)$$

El filtro $H(B)H(F)$ es simétrico y de cola infinita, pero convergente porque se supone que el modelo es invertible. Por tanto, se puede expresar este filtro como $H(B)H(F) = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(B^j + F^j)$.

Cuando, como es habitual, se dispone sólo de una serie observada finita $z = (z_1, \dots, z_N)'$, lo que se suele hacer es aplicar el mismo filtro, pero sustituyendo las observaciones desconocidas por predicciones. Es decir, lo que se calcula es

$$\hat{p}_t = h_0 \hat{z}_t + \sum_{j=1}^{\infty} h_j (\hat{z}_{t-j} + \hat{z}_{t+j}),$$

donde \hat{z}_s es igual a z_s si $1 \leq s \leq N$ y es una predicción en caso contrario. El estimador \hat{p}_t correspondiente a la muestra finita se puede calcular recursivamente utilizando el procedimiento de Burman (1980).

Si se utiliza el procedimiento de Burman (1980), no es necesario calcular más que un número reducido de predicciones, debido a la utilización del algoritmo de Tunnicliffe Wilson. Además, los errores se pueden calcular siguiendo la metodología de Maravall (1987). Esta es la forma de proceder que utiliza el programa SEATS.

Para calcular el error en media cuadrática (EMC) del estimador \hat{p}_t correspondiente a la muestra finita, se considera la descomposición

$$E(p_t - \hat{p}_t)^2 = E(p_t - \hat{p}_t)^2 + E(\hat{p}_t - \hat{p}_t)^2,$$

donde \hat{p}_t es el estimador correspondiente a la muestra doblemente infinita, $p_t - \hat{p}_t$ es el error de estimación final y $\hat{p}_t - \hat{p}_t$ es el error de revisión. Ambos errores son independientes. Así pues, el EMC total es la suma del EMC final y del EMC de revisión.

El caso que más interesa es probablemente aquel en el que $t = N$, donde z_N es la última observación de la muestra. Entonces, se dice que \hat{p}_N es el estimador concurrente. El error de revisión es el que se produce al ir añadiendo nuevas observaciones e ir modificando el estimador hasta que finalmente converge al estimador final \hat{p}_N . El error de estimación final es el que se comete al estimar p_N a partir de la muestra doblemente infinita.

Una de las ventajas del método basado en modelos es que se pueden calcular los EMC anteriores y tener una idea de, por ejemplo, cuántos meses será necesario estar revisando hasta considerar que el estimador ha convergido prácticamente al estimador final. Esta información la proporciona, entre otras muchas cosas, el programa SEATS.

Los filtros proporcionados por el método basado en modelos se ajustan a las características de la serie. Por el contrario, si se utilizan siempre filtros fijos, por ejemplo los del programa X11-ARIMA, unas veces se estará quitando demasiada variación estacional (sobreajustando) y otras demasiada poca (infraajustando). Este punto está espléndidamente ilustrado en Maravall (1993).

Para el caso del modelo de líneas aéreas, los parámetros α y σ_b/σ_a que aparecen en la expresión (2) se pueden calcular fácilmente mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_b}{\sigma_a} &= \frac{(1+\theta)(1+\Theta)}{2(1+\alpha)s} \\ \alpha &= \frac{1-L-\sqrt{1-2L}}{L} \\ L &= \frac{2\theta}{(1+\theta)^2} + \frac{2\Theta s^2}{(1+\Theta)^2} - \frac{s^2+2}{6},\end{aligned}$$

donde $s = 12$ si la serie es mensual y $s = 4$ si es trimestral. La demostración de este resultado puede verse en el apéndice A. Nótese que los valores α y σ_b/σ_a del filtro dependen sólo de los parámetros θ y Θ .

Estas fórmulas corrigen un error en las fórmulas de Melis (1992), que han venido utilizándose en la CNT desde sus comienzos. El error es más acusado

para series trimestrales que para series mensuales. Para estas últimas, no tiene mucha importancia para valores de θ y Θ cuyo valor absoluto esté por encima de .5. Quizás por esta razón no se haya detectado antes.

El modelo de líneas aéreas es muy flexible y puede verse como un modelo general que contiene como casos particulares otros muchos modelos. Por ejemplo, si el parámetro θ tiende a -1 , entonces el factor de medias móviles $1-\theta B$ tiende a cancelarse con el factor autorregresivo $\nabla = 1-B$, con lo que el proceso tiende a tener una tendencia determinista. Así pues, podemos decir que valores de θ próximos a -1 están asociados con una tendencia estable. De la misma manera se comprueba que cuando el valor de Θ es próximo a -1 , eso es sinónimo de una estacionalidad estable. Los filtros de Wiener-Kolmogorov reflejan estas situaciones, de forma que si, por ejemplo, el parámetro θ está próximo a -1 , el filtro se cierra bastante en las proximidades de la frecuencia cero. Lo contrario sucede si θ está lejos de -1 . En la figura 1 a) pueden verse tres ejemplos. El primero es un modelo con tendencia estable ($\theta = -.85$) y estacionalidad inestable ($\Theta = -.2$), el segundo uno con tendencia inestable ($\theta = .8$) y estacionalidad estable ($\Theta = -.85$), y el tercero es un caso intermedio ($\theta = -.65$, $\Theta = -.65$).

El Filtro Lam

Los filtros de ciclo-tendencia de X11-ARIMA o X12-ARIMA son el producto de un filtro desestacionalizador y un filtro de paso bajo. Este último filtro es una media de Henderson, cuyo tamaño elige el programa en función del cociente señal/ruido mencionado anteriormente. En la figura 1 b) pueden verse los filtros de X11-ARIMA correspondientes a las medias de Henderson de 9, 13 y 23 términos.

La idea que hay detrás del filtro LAM consiste en sustituir los dos filtros cuyo producto constituye el filtro de ciclo-tendencia del X11-ARIMA por dos filtros ARMA causales de similares características.

El primero de estos filtros, que es el análogo al filtro desestacionalizador de X11-ARIMA, es el factor formado por el cociente de polinomios en el operador de retardos B de un filtro de Wiener-Kolmogorov de ciclo-tendencia correspondiente a un modelo de líneas aéreas, con unos parámetros adecuados. Es decir, se trata del filtro $H(B)$ dado por (2), donde los valores de θ y Θ del modelo de líneas aéreas se eligen de forma que la función de ganancia del filtro se asemeje a la del filtro desestacionalizador de X11-ARIMA. Esta

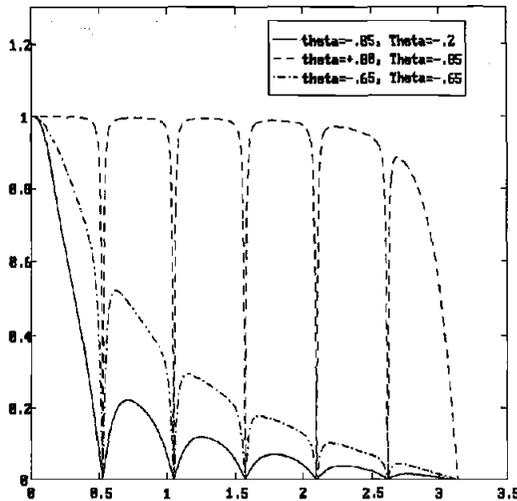


Fig. 1a) Filtros de ciclo-tendencia de líneas aéreas: Función de ganancia

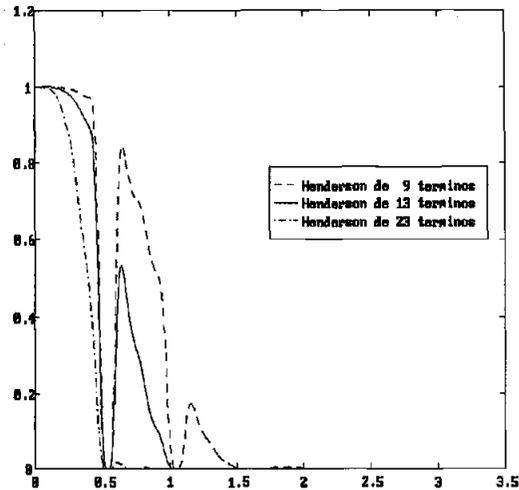


Fig. 1b) Filtros simétricos de ciclo-tendencia de X11: Función de ganancia

es la razón por la que en el LAM los valores de los parámetros son $\theta = .8$ y $\Theta = -.85$. En la figura 2 a) se pueden ver las ganancias del filtro $H(B)$ del LAM y del filtro desestacionalizador de X11-ARIMA correspondiente a una media de Henderson de 23 términos.

El desfase de los filtros de líneas aéreas $H(B)$ puede ser inferior a media unidad de tiempo si θ es próximo a 1 y Θ es próximo a -1 . En la figura 2 b) se ilustra este hecho para el filtro $H(B)$ del LAM.

El segundo de los filtros del LAM es un filtro autorregresivo de Butterworth de orden 4 con potencia mitad en la frecuencia $2\pi/16$. En concreto, el filtro es

$$H_r(B) = \frac{h_0}{1 + h_1B + h_2B^2 + h_3B^3 + h_4B^4},$$

donde $h_0 = 0.0139$, $h_1 = -2.9885$, $h_2 = 3.4456$, $h_3 = -1.8029$ y $h_4 = 0.3598$. Los valores de h_1 y h_3 no coinciden con los publicados por INE (1995), pg. 88, que son erróneos, quizás debido a un error tipográfico.

Este filtro hace las funciones de las medias de Henderson en X11-ARIMA. Sin embargo, mientras que en este último programa se elige la longitud de las medias de Henderson en función del cociente señal/ruido, permitiéndose

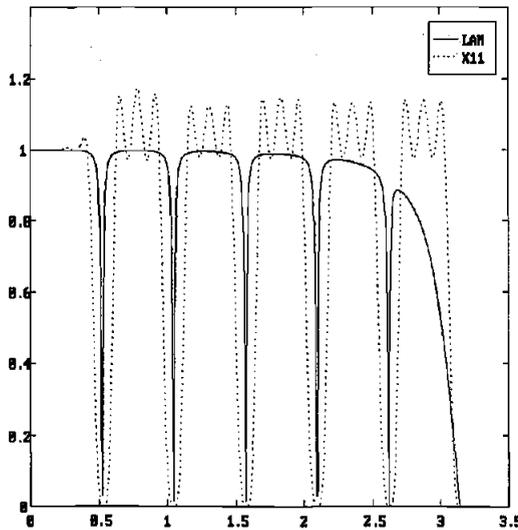


Fig. 2a) Filtro desestacionalizador de X11 (hend. 23) y filtro $H(B)$ del LAM: Funciones de ganancia

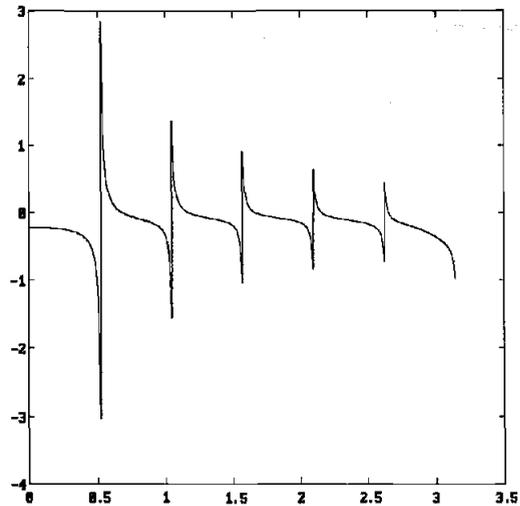


Fig. 2b) Función de desfase del filtro $H(B)$ del LAM

así una mayor adaptabilidad a las características de la serie, en el LAM los dos filtros componentes son siempre los mismos. En este sentido, el filtro LAM es menos flexible que el procedimiento X11-ARIMA, o el reciente X12-ARIMA, lo que se traducirá en que presentará los mismos problemas, pero agravados, que X11-ARIMA o X12-ARIMA al ser aplicado a determinadas series. Por ejemplo, como se verá más adelante, la aplicación del LAM a series con una tendencia muy estable producirá ciclos espurios por no ser el filtro lo suficientemente estrecho. En la figura 3 a) se pueden ver las ganancias del filtro $H_r(B)$ y de una media de Henderson de 23 términos. En la figura 3 b) se presenta la función de desfase del filtro $H_r(B)$.

La función de ganancia y de desfase del filtro producto $H(B)H_r(B)$ de los filtros causales mencionados se pueden ver en las figuras 4 a) y 4 b). Nótese que el desfase es aproximadamente 6 en la banda de ciclo-tendencia, si bien la función de fase no es lineal. Las funciones de fase lineales son deseables porque se traducen exactamente en un desplazamiento de la serie filtrada, lo cual no es cierto más que aproximadamente para funciones de fase no lineales.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, el filtro LAM es el producto $H(B) \times H_r(B)F^6$, donde se ha añadido el factor F^6 al producto $H(B)H_r(B)$ para

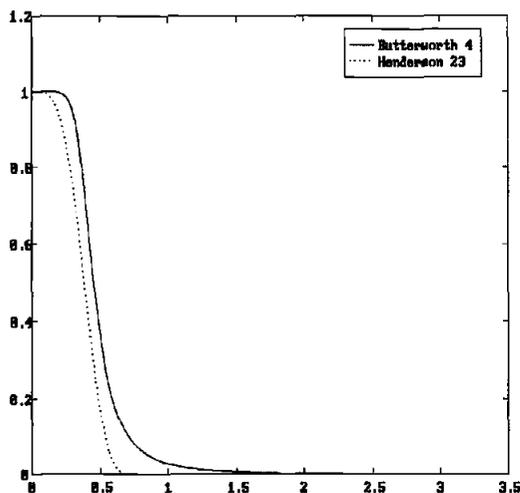


Fig. 3a) Filtro $H_r(B)$ del LAM y media de Henderson de 23 términos: Funciones de ganancia

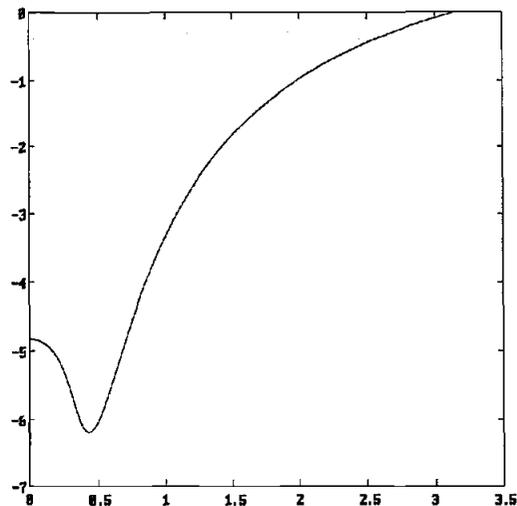


Fig. 3b) Función de desfase del filtro $H_r(B)$ del LAM

corregir el desfase. Por eso, la aplicación del filtro sin más produce una pérdida de seis observaciones en la serie filtrada al final de la serie. Para obtener estas últimas seis estimaciones hay que utilizar seis predicciones de la serie de entrada.

Los filtros óptimos basados en modelos tienen desfase cero porque son filtros simétricos. Si bien esto es cierto solamente cuando se dispone de una serie doblemente infinita, se puede demostrar que los desfases de los filtros finitos, que, sobre todo en los extremos, son filtros asimétricos y no invariantes en el tiempo, son próximos a cero.

Al ser el LAM un filtro ARMA, se necesitan valores iniciales para poder ir obteniendo recursivamente los valores de la serie filtrada. Entre las propuestas que se han hecho, figuran la de utilizar como valores iniciales la media de la serie a filtrar para los dos primeros años y la de filtrar hacia atrás la serie empezando con ceros, que es la que parece que utiliza el INE, aunque este aspecto no está documentado. Sin embargo, ninguna de estas dos opciones es óptima, en el sentido de que, si se dispone de un modelo para la serie, se pueden obtener unas recursiones parecidas a las del algoritmo de Tunnicliffe Wilson.

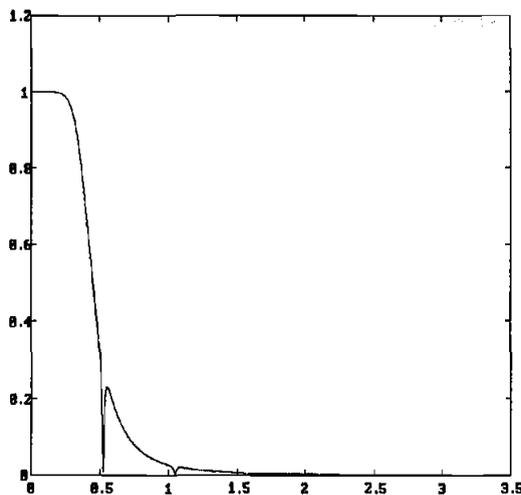


Fig. 4a) Función de ganancia del filtro LAM

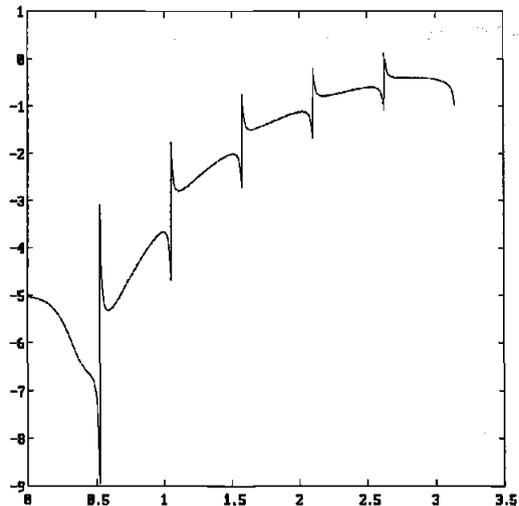


Fig. 4b) Función de desfase del filtro LAM

Otra consecuencia que se deduce de ser el filtro LAM un filtro ARMA es que no se aprovecha toda la información de la muestra para obtener la estimación del ciclo-tendencia. Sólomente se aprovecha la información pasada, por lo que la señal estimada estará sujeta a mayores EMC que si se utilizara toda la muestra.

Aún en el caso de que se utilizara toda la muestra para estimar el ciclo-tendencia, como se está utilizando un filtro fijo, los EMC de estimación final y de revisión serán mayores que los correspondientes al estimador óptimo obtenido con el método basado en modelos.

Con respecto a los errores de revisión del LAM, ya se ha comentado que el número máximo de las revisiones del filtro es 6. Sin embargo, por lo dicho en el párrafo anterior, las estimaciones dadas por definitivas cuando se usa el filtro LAM estarán sujetas a un EMC mayor que las estimaciones definitivas del ciclo-tendencia obtenidas con el método basado en modelos.

Otro aspecto que debe ser resaltado es el de que el filtro LAM, por ser un filtro fijo, no permite hacer inferencia. Por ejemplo, no se dispone de los EMC de los estimadores.

3 Un Filtro de Hodrick–Prescott Para Suavizar las Series de Ciclo–Tendencia Obtenidas con el Método Basado en Modelos

Los filtros de ciclo–tendencia utilizados por el programa X11–ARIMA, así como los proporcionados por el método basado en modelos, son filtros que, en ocasiones, dejan pasar, aunque atenuándolas, las oscilaciones de frecuencias entre la primera ($2\pi/12$) y la segunda ($4\pi/12$) frecuencias estacionales y, en menor medida, de frecuencias superiores. Ver figuras 1 a) y 1 b).

El que los filtros basados en modelos se abran más o menos viene determinado, como ya se ha comentado, por la mayor o menor volatilidad del componente de ciclo–tendencia. Si la tendencia es muy estable, el filtro se cierra y viceversa.

Existen casos en los que los economistas están interesados en disponer de estimaciones de tendencias suaves o de ciclos económicos, definidos a partir de una banda de frecuencias. Por ejemplo, Burns y Mitchell (1946) definen el ciclo económico para la economía americana como las oscilaciones de período comprendido entre año y medio y ocho años. En esos casos, si el método basado en modelos proporciona un filtro de ciclo–tendencia que incluye la banda de interés, lo que quiere decir que hay potencia apreciable en el pseudoespectro de la serie en esa banda, se plantea la posibilidad de descomponer a su vez el componente de ciclo–tendencia en subcomponentes adecuados.

Sin embargo, debido a las limitaciones de los modelos ARIMA y al principio de parsimonia implícito en el procedimiento de identificación propuesto por Box y Jenkins, el método basado en modelos no tiene información suficiente para discriminar entre tendencia más suave y ciclo. La información necesaria es una información a priori que debe darla el usuario, y la forma de incorporar esta información es la de proporcionar la banda de frecuencias de interés. Por ejemplo, el usuario puede estar interesado en una tendencia definida como el conjunto de las oscilaciones de período igual o superior a ocho años.

Una vez dada la información necesaria para descomponer el ciclo–tendencia, especificada mediante una banda de frecuencias, el método para obtener los subcomponentes que se propone en este trabajo es el de la aplicación de un filtro fijo sobre, y esto es muy importante, el componente de ciclo–tendencia estimado con el método basado en modelos. El filtro que se propone es un

filtro de paso bajo, cuya finalidad es estimar una tendencia más suave.

El filtro fijo debe aplicarse al componente de ciclo-tendencia dado por el método basado en modelos para asegurarnos de que el filtro se utiliza correctamente. Por ejemplo, si la serie de entrada es un ruido blanco, el método basado en modelos lo detectaría y nos daría un ciclo-tendencia estimado que sería cero. Por tanto, la aplicación del filtro fijo sobre cero, también daría cero. Es decir, no habría tendencia suave. De la misma forma, el filtro de ciclo-tendencia del método basado en modelos se abrirá más o menos, en función de que haya más o menos potencia en el pseudoespectro en la banda cíclica y frecuencias superiores, por lo que la aplicación en cascada de primero el filtro basado en modelos y después el filtro fijo nos llevará al resultado correcto. Por el contrario, si se aplicara un suavizado al filtro LAM sin más, buscando por ejemplo estimar una tendencia suave, nos encontraríamos con el mismo problema que tiene el LAM. Es decir, se podrían producir ciclos espurios al aplicarse el filtro a determinadas series.

Centrándonos en el caso de querer estimar una tendencia más suave, supongamos que queremos estimar un componente tendencial formado por oscilaciones de período igual o superior a aproximadamente 12 meses (un año). Para ese caso, se propone en este trabajo utilizar, de la forma descrita más arriba, un filtro de Hodrick-Prescott de parámetro $\lambda = 68.738376$. Como se demuestra en el apéndice B, este filtro es la versión simétrica de un filtro de Butterworth del seno de potencia mitad en $2\pi/20$ y tiene, por tanto, las propiedades requeridas. Además, tiene características frecuenciales similares a las del filtro AR(2) propuesto por Melis (1989), pero a su vez incorpora importantes mejoras respecto a este último.

Entre las mejoras del filtro propuesto, cabe citar que no tiene problemas de condiciones iniciales, que no tiene desfase, por lo que no necesita predicciones, y que la señal obtenida es más suave. Además, como el filtro se aplica sobre el componente de ciclo-tendencia obtenido con el método basado en modelos y no sobre la serie original, no se producen ciclos espurios. En el apéndice B se hace una descripción del filtro de Hodrick-Prescott propuesto y se demuestra que todo filtro de Hodrick-Prescott es la versión simétrica de un filtro de Butterworth. Su función de ganancia es el cuadrado de la función de ganancia del filtro AR(2). Su función de desfase es cero porque es un filtro simétrico. Las funciones de ganancia del filtro propuesto y del AR(2) pueden verse en la figura 5 a). En la figura 5 b) se presenta la función de desfase del filtro AR(2).

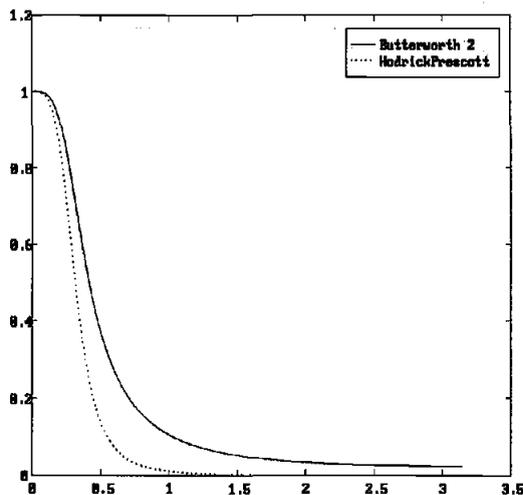


Fig. 5a) Filtro de Hodrick-Prescott propuesto y filtro AR2: Funciones de ganancia

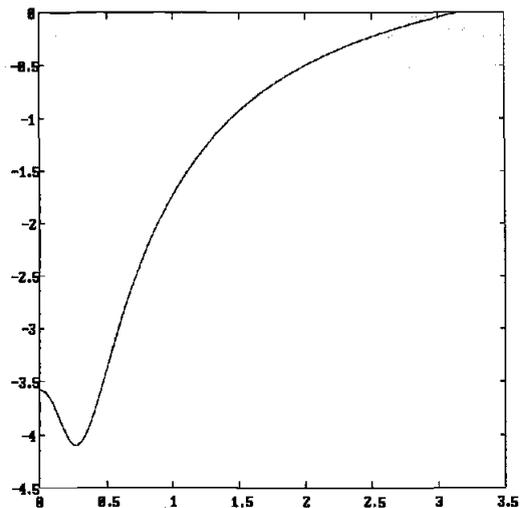


Fig. 5b) Función de desfase del filtro AR2

Finalmente, mencionaremos que se podría utilizar la información del modelo del componente de ciclo-tendencia para mejorar las estimaciones del filtro, sobre todo en los extremos. Pero este es un tema que nos llevaría demasiado lejos y con la entidad suficiente como para ser objeto de otro artículo.

4 Experiencia Práctica con el Filtro Lam y con los Programas Tramo y Seats

Para mostrar algunos de los problemas de los filtros fijos, como el filtro LAM, comenzamos por generar una serie de 100 observaciones independientes de una variable $N(0,1)$. A esta serie, le aplicamos el filtro LAM y también los programas TRAMO y SEATS, en su opción de modelización automática en presencia de observaciones atípicas, con contraste previo para la transformación logarítmica, efecto de Día Laborable (una variable) y efecto de Pascua ($RSA = 4$). En lo que sigue, salvo que se mencione lo contrario, siempre se aplicarán los programas TRAMO y SEATS con esta opción.

Los ciclo-tendencias obtenidos con ambos programas pueden verse en

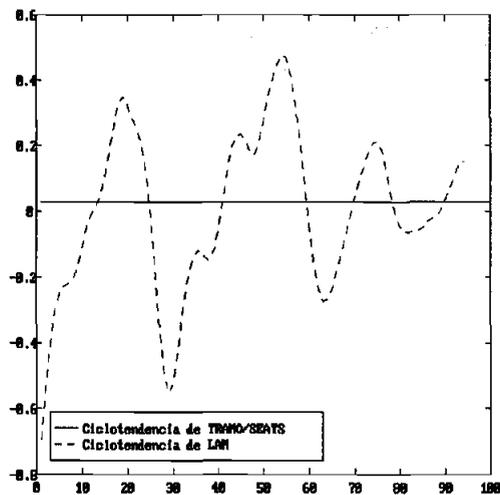


Fig. 6a) Series de ciclo-tendencia de un ruido blanco

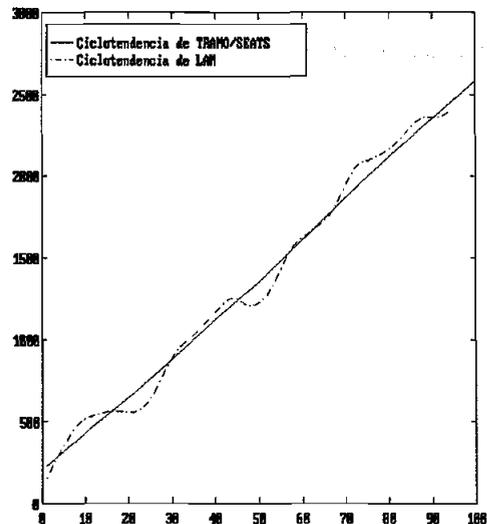


Fig. 6b) Series de ciclo-tendencia de una serie simulada con una tendencia estable

la figura 6 a). Los programas TRAMO y SEATS han estimado como ciclo-tendencia una línea recta horizontal, como debe ser, teniendo en cuenta las características de la serie. Sin embargo, el filtro LAM ha estimado un ciclo-tendencia espurio. Este mismo resultado se ha obtenido al realizar 300 simulaciones de un ruido blanco. En general, TRAMO identifica modelos MA(1) o AR(1) con parámetros muy pequeños y no significativos (TRAMO especifica un MA(1) si no encuentra estructura en la serie), o modelos con una diferencia regular y/o estacional que se compensan con una media móvil de parámetro muy próximo a -1. Para estos modelos, SEATS o bien da un mensaje diciendo que la serie no se puede descomponer (lo que significa que no tienen tendencia) o estima una tendencia que es una recta aproximadamente horizontal.

Intuitivamente, el filtro LAM funcionará mal cuando el modelo que sigue la serie se aparta del modelo de líneas aéreas que corresponde al factor $H(B)$ del filtro ($\theta = .8$, $\Theta = -.85$) que, como se ha visto anteriormente, corresponde a una tendencia muy volátil. Si, además, el cociente señal/ruido es pequeño, o, lo que es lo mismo, el componente irregular tiene una varianza apreciable en la composición de la serie, será más probable que se produzcan ciclos

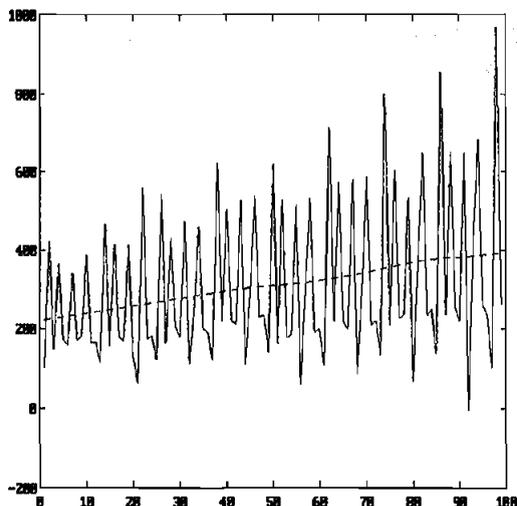


Fig. 7a) Serie del IVA y ciclo-tendencia de TRAMO/SEATS

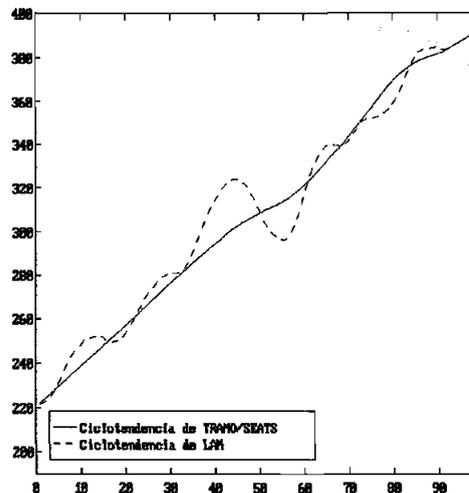


Fig. 7b) Series de ciclo-tendencia del IVA

espurios (efecto Slutsky).

Para verificar esta conjetura, primero se ha generado una serie que sigue un modelo de líneas aéreas con parámetros $\theta = -0.7$, $\Theta = -0.1$ y varianza de las innovaciones igual a 1, que tiene una tendencia bastante estable. Después, se ha generado un ruido blanco independiente de la anterior, de desviación típica 150, y se han sumado ambas series. Los ciclo-tendencias obtenidos con el LAM y con TRAMO/SEATS pueden verse en la figura 6 b). Se comprueba que el LAM ha producido ciclos espurios. Al igual que con el ejemplo anterior, este fenómeno se ha observado al realizar numerosas simulaciones de series con estas características.

Un ejemplo de una serie real que tiene una estructura similar a la del ejemplo anterior lo constituye la serie de recaudaciones del impuesto sobre el valor añadido (IVA). Se trata de una serie mensual con 99 observaciones, que van desde enero de 1989 a marzo de 1997. Utilizando la opción $RSA = 4$ de TRAMO, se detecta un escalón en la observación 49 (enero de 1993). Para evitar tendencias con escalones y facilitar así la comparación de los resultados, se ha hecho la modelización automática considerando nada más que los atípicos del tipo cambio temporal (TC) e impulso (AO). La serie original y el ciclo-tendencia obtenido con TRAMO/SEATS pueden verse en la

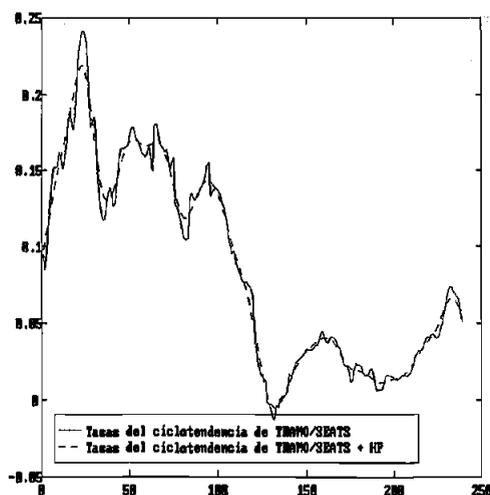


Fig. 8a) Tasas interanuales de las series de ciclo-tendencia del IPRI

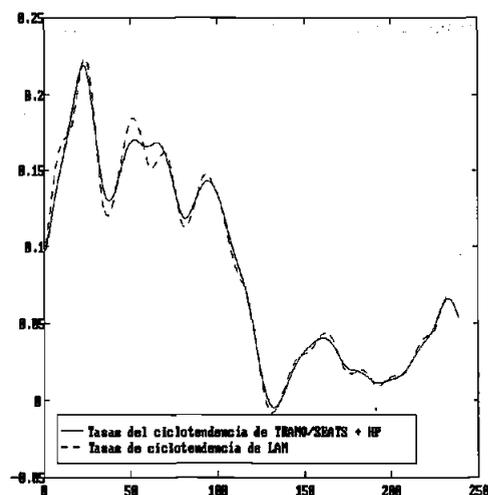


Fig. 8b) Tasas de ciclo-tendencia del IPRI

figura 7 a). Como puede apreciarse, el ciclo-tendencia es muy estable, por lo que el filtro de ciclo-tendencia dado por el método basado en modelos se cierra rápidamente en las proximidades de la frecuencia cero. Para esta serie no hay apenas ciclo. Sin embargo, el filtro LAM obtiene un ciclo espurio, como puede apreciarse en la figura 7 b).

Una serie para la que el filtro LAM puede ser adecuado es la serie del índice de precios industriales (IPRI). La serie consta de 251 observaciones, con período muestral que va de enero de 1975 a noviembre de 1995. En este caso, el ciclo-tendencia de TRAMO/SEATS es menos suave que el obtenido con el LAM. Sin embargo, se puede conseguir un ciclo-tendencia más suave que el de TRAMO/SEATS aplicándole a este último el filtro de Hodrick-Prescott propuesto, como se puede apreciar en la figura 8 a). El ciclo-tendencia suavizado puede verse, junto con el ciclo-tendencia del LAM, en la figura 8 b).

Una propiedad deseable en los filtros de ciclo-tendencia y en los filtros desestacionalizadores es la de la idempotencia. Es decir, si el filtro se aplica sobre la salida del mismo filtro, lo que debe obtenerse es la misma serie filtrada. Esto parece un requisito razonable a exigir a cualquier filtro de los mencionados. Para ver el comportamiento del filtro LAM a este respecto, se

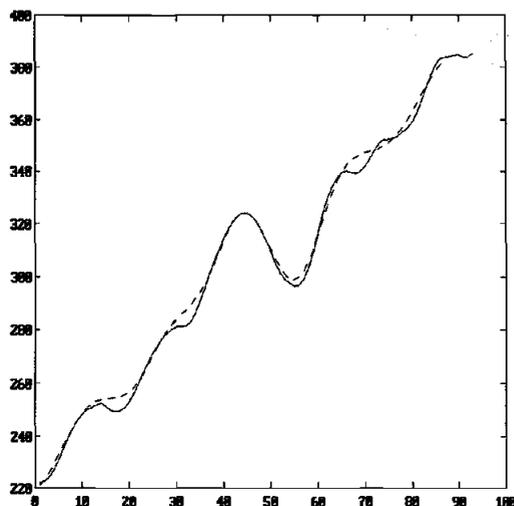


Fig. 9a) Idempotencia del filtro LAM:
Serie del IVA

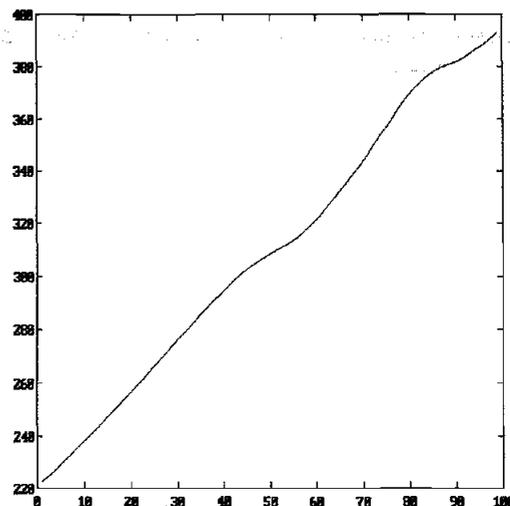


Fig. 9b) Idempotencia de TRAMO/
SEATS: Serie del IVA

ha aplicado dicho filtro primero a la serie del IVA mencionada antes y luego se ha aplicado el mismo filtro a la serie filtrada. El resultado puede verse en la figura 9 a). Claramente, las dos series no son iguales. Sin embargo, si se repite el ejercicio con TRAMO/SEATS, el requisito si que se cumple, como puede verse en la figura 9 b). Los mismos resultados se han obtenido para las otras series reales utilizadas en este trabajo, así como para numerosas series simuladas.

Como se ha mencionado anteriormente, una cuestión importante en la estimación de los ciclo-tendencias es la de las revisiones. Como ejemplo para ver el comportamiento de los distintos filtros considerados ante esta cuestión, se ha elegido la serie del indicador de clima industrial (ICI), elaborado por el Ministerio de Industria y Energía, ver Bengoechea y Gómez (1997). Se trata de una serie de 229 observaciones, cuyo período muestral es 1-1978 a 1-1997. La serie original, junto con el ciclo-tendencia obtenido con TRAMO/SEATS, puede verse en la figura 10 a). A su vez, este último ciclo-tendencia y el obtenido con el filtro LAM pueden verse en la figura 10 b). Como puede comprobarse, el filtro LAM no funciona mal en esta ocasión, proporcionando una serie filtrada más suave que la de TRAMO/SEATS.

Se ha realizado el siguiente ejercicio. Se ha considerado la muestra dada

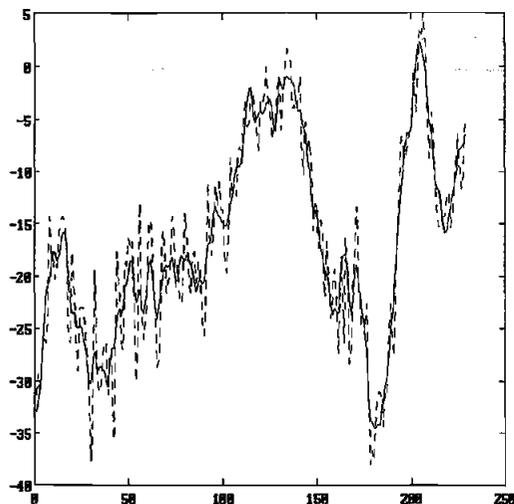


Fig. 10a) Serie del ICI y ciclo-tendencia obtenido con TRAMO/SEATS

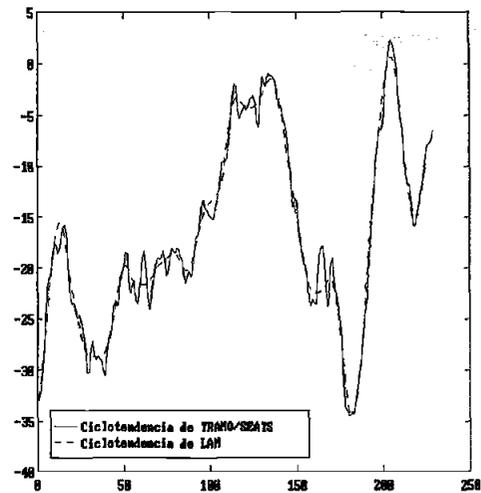


Fig. 10b) Series de ciclo-tendencia del ICI

por las primeras 204 observaciones y luego se han añadido, mes a mes, seis observaciones. Este número viene determinado porque seis es el número máximo de revisiones con el filtro LAM. Al utilizar TRAMO y SEATS para este ejercicio, el modelo se ha mantenido constante y los parámetros no se han reestimado al ir añadiendo observaciones. Es decir, el modelo y las estimaciones de los parámetros que se utilizan son los obtenidos con la muestra de 204 observaciones. En cuanto a los atípicos, se ha efectuado una búsqueda cada vez que se añadían observaciones, pero los atípicos encontrados siempre han sido los mismos y corresponden a la primera parte de la muestra.

Los diferentes ciclo-tendencias pueden verse en las figuras 11 a) y 11 b). En los gráficos puede apreciarse claramente como las revisiones para la observación 204 son mayores con el LAM que con TRAMO/SEATS. Además, si se considera la muestra completa, resulta que la observación 205 es un punto de giro. En los gráficos también se aprecia como dicho punto de giro se detecta antes con TRAMO/SEATS que con el LAM. Las revisiones para la observación 204, expresadas en tanto por ciento de variabilidad sobre la estimación anterior, pueden verse en la siguiente tabla.

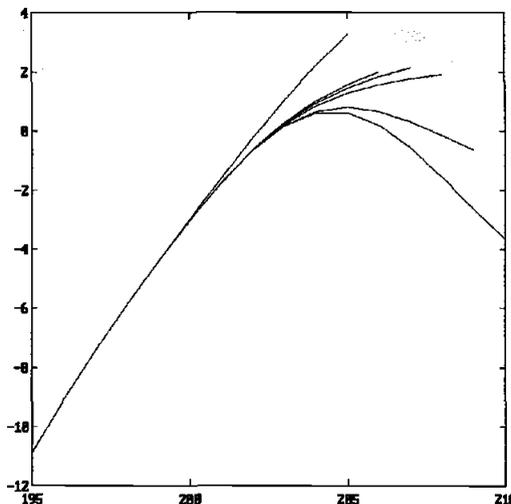


Fig. 11a) Series de ciclo-tendencia del ICI-LAM (obs. 195-210)

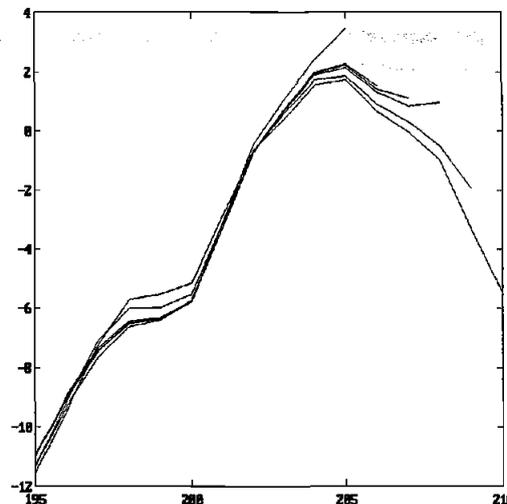


Fig. 11b) Series de ciclo-tendencia del ICI-T/S (obs. 195-21)

nueva obs.	205	206	207	208	209	210
T/S	6.2954	-18.0382	-1.6663	-2.7779	-9.6164	-9.3188
LAM	9.9914	-53.9489	-7.1811	-9.4075	-23.1490	-6.8783

Es importante resaltar que, aunque el LAM no tiene más que seis revisiones, sus estimadores definitivos están sujetos a un error mayor que los de TRAMO/SEATS, que son óptimos.

Como regla general, puede decirse que si la tendencia es muy volátil, como la de este ejemplo del ICI, las revisiones del LAM, que proporciona una señal más suave que TRAMO/SEATS, pueden ser considerables. El ciclo-tendencia de TRAMO/SEATS es más errático, pero está sujeto a revisiones menores.

5 Resumen y Conclusiones

En este trabajo se ha considerado el filtro de ciclo-tendencia utilizado por el INE para la elaboración de la CNT. Dicho filtro, que se conoce con las siglas LAM, puede funcionar bien para un cierto número de series. Sin embargo, no sólo presenta los mismos problemas que X11-ARIMA, sino que aparecen algunos nuevos, como el de las condiciones iniciales y el desfase.

Se ha visto que el LAM produce malos resultados cuando se aplica a series con una tendencia estable. Por otra parte, cuando la serie tiene una tendencia muy estocástica, las revisiones pueden ser bastante considerables. Además, el filtro tiene problemas con la propiedad de idempotencia y parece manifestar cierto retraso en señalar los puntos de giro.

Como todos los filtros fijos, no permite hacer inferencia, ya que no se dispone de los EMC de los estimadores, por ejemplo. Los valores iniciales del filtro no son óptimos, aunque esto no parece ser un problema grave.

El filtro LAM requiere, para poder obtener estimaciones actuales, utilizar seis predicciones. Por tanto, se necesitan modelos y de lo buenos que sean estos modelos va a depender si las revisiones son grandes, si las estimaciones definitivas son mejores o peores, etc. Si el volumen de series a tratar es grande, se hace necesario el uso de métodos de modelización automática, con posibilidades de tratamiento de observaciones atípicas, efecto de Día Laborable, efecto de Pascua, etc.

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, los programas TRAMO y SEATS permiten hacer una modelización automática de estas características, que funciona bastante bien, ver Eurostat (1996). Además, permiten utilizar técnicas de extracción de señal que, como se ha visto en los ejemplos anteriores, son mejores que la utilización de un filtro fijo como el LAM y son más rápidas.

Apéndice A

Para demostrar las fórmulas que dan los parámetros α y σ_b/σ_a del filtro óptimo de ciclo-tendencia en función de s , θ y Θ , en el caso en que la serie siga un modelo de líneas aéreas (1), tengamos en cuenta que, por ser los componentes ortogonales, se tiene la siguiente relación entre los pseudoespectros $f_z(x) = f_p(x) + f_s(x) + f_w(x)$. Entonces, dividiendo por $f_z(x)$, se obtiene la relación $1 = h_p(x) + h_s(x) + h_w(x)$, donde $h_p(x)$, $h_s(x)$ y $h_w(x)$ son las funciones de respuesta frecuencial de los filtros de ciclo-tendencia, estacional e irregular, respectivamente. Sustituyendo en estas expresiones e^{-ix} por el operador de retardos B , se obtiene la expresión del filtro en el dominio del tiempo. En el caso del ciclo-tendencia, se tiene

$$h_p(x) = \frac{\sigma_b^2 (1 + e^{-ix})(1 + \alpha e^{-ix})(\sum_{j=0}^{s-1} e^{-ijx})(1 + e^{ix})(1 + \alpha e^{ix})(\sum_{j=0}^{s-1} e^{ijx})}{\sigma_a^2 (1 + \theta e^{-ix})(1 + \Theta e^{-ix})(1 + \theta e^{ix})(1 + \Theta e^{ix})}$$

Es fácil comprobar que $h_s(0) = h_w(0) = 0$, lo que implica $h_p(0) = 1$, y que, tanto

en $h_s(x)$ como en $h_w(x)$, se puede sacar factor común el término $(1 - e^{-ix})^2(1 - e^{ix})^2$, lo que implica que se anulen en cero las dos primeras derivadas de $h_s(x)$ y $h_w(x)$. Por tanto, también se anulan en cero las dos primeras derivadas de $h_p(x)$.

La condición $h_p(0) = 1$, implica

$$\frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2} = \frac{(1 + \theta)^2(1 + \Theta)^2}{4(1 + \alpha)^2 s^2}.$$

Tomando logaritmos, derivando dos veces y haciendo $x = 0$, se llega a la expresión

$$0 = -\frac{2\alpha}{(1 + \alpha)^2} + \frac{2\theta}{(1 + \theta)^2} + \frac{2s^2\Theta}{(1 + \Theta)^2} - \frac{s^2 + 2}{6}.$$

Llamando L a la suma de los términos, excepto el primero, a la derecha del signo igual en la expresión anterior, y haciendo $1 + \alpha = z$, se obtiene la ecuación de segundo grado $Lz^2 - 2z + 2 = 0$. De esta ecuación se deducen las soluciones

$$\alpha = \frac{1 - L \pm \sqrt{1 - 2L}}{L}.$$

Como se tiene que verificar $|\alpha| < 1$ y, por tanto, $L < 1/2$, hay que elegir el signo menos, por lo que la solución es

$$\alpha = \frac{1 - L - \sqrt{1 - 2L}}{L}.$$

Apéndice B

En este apéndice se hace una breve descripción del filtro de Hodrick- Prescott propuesto y se demuestra que todo filtro de Hodrick- Prescott es la versión simétrica de un filtro de Butterworth.

Para obtener el filtro propuesto por Hodrick y Prescott (1980), supongamos que las observaciones z_t , $t = 1, \dots, N$ se descomponen en suma de una función "suave" p_t más ruido

$$z_t = p_t + \epsilon_t \quad (3)$$

y que se trata de estimar p_t , $t = 1, \dots, N$, que es desconocido y típicamente es la tendencia de una serie temporal no estacionaria. Se desea que la solución sea un compromiso entre bondad del ajuste a los datos y fidelidad a un criterio de suavizado. Esta idea se materializa minimizando

$$\sum_{t=1}^N (z_t - p_t)^2 + \lambda \sum_{t=k+1}^N (\nabla^k p_t)^2, \quad (4)$$

donde $\nabla p_t = p_t - p_{t-1}$ y $\nabla^k = \nabla(\nabla^{k-1})$, y λ es un parámetro de suavizado adecuadamente elegido.

Las propiedades de la solución al problema (3)-(4) son claras. Si $\lambda = 0$, $p_t = z_t$ y la solución es una réplica de las observaciones. Al aumentar λ , la restricción de suavizado domina la solución y ésta satisface una restricción de orden k . Para λ grande y $k = 1$, la solución es una constante; para $k = 2$, es una línea recta; y así sucesivamente.

El filtro de Hodrick y Prescott es el que resulta de hacer $k = 2$ en (4). Es un hecho notable que estos autores eligieran con tanto éxito el valor de $\lambda = 1600$ en (4) para datos trimestrales de la economía americana.

Otro hecho notable es que el problema de la estimación de la señal p_t en (3) mediante el problema de minimización (4) es equivalente a estimar p_t mediante extracción de señal en el modelo (3) bajo la hipótesis de que los componentes sigan ciertos modelos ARIMA. Concretamente, este resultado es válido si p_t sigue el modelo $\nabla^2 p_t = \eta_t$, donde los valores iniciales p_{-1}, p_0 se consideran fijos, los η_t constituyen una sucesión de variables aleatorias i.i.d $N(0, \sigma_\eta^2)$ y los ϵ_t son una sucesión i.i.d. $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ independientes de los η_t . Una demostración de este resultado puede verse en Kohn y Ansley (1990), p. 424.

Suponiendo conocida la muestra doblemente infinita $\{z_t\}$, el estimador \hat{p}_t de la tendencia p_t viene dado por el filtro de Wiener-Kolmogorov, puesto que, como se demuestra en Bell (1984), el filtro de Wiener-Kolmogorov también se puede aplicar a series temporales no estacionarias. No es difícil comprobar que la fórmula para el estimador es

$$\hat{p}_t = \frac{1}{1 + \lambda(1 - B)^2(1 - F)^2} z_t,$$

donde $\lambda = \sigma_\epsilon^2 / \sigma_\eta^2$.

La función de respuesta frecuencial $\hat{H}(x)$ del filtro de Hodrick-Prescott infinito se obtiene sustituyendo B por e^{-ix} en la expresión anterior para \hat{p}_t . Después de algunas manipulaciones, se obtiene

$$\hat{H}(x) = \frac{1}{1 + 16\lambda \text{sen}^4(x/2)}.$$

Dado que esta función es real, coincide con la función de ganancia del filtro. Además, esta función de ganancia es un caso particular del cuadrado de la función de ganancia de un filtro de Butterworth de la versión del seno, cuya expresión general es

$$|G(x)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\text{sen}(x/2)}{\text{sen}(x_c/2)} \right]^{2N}}. \quad (5)$$

Estos filtros son filtros de paso bajo tales que $|G(x_c)|^2 = 1/2$. Al aumentar N , su caída se hace más pronunciada, ver Oppenheim y Schaffer (1989). Por tanto, en el caso del filtro de Hodrick–Prescott, $N = 2$ y $\text{sen}(x_c/2) = 1/(2\lambda^{1/4})$.

Los filtros de Butterworth de la versión del seno son filtros autorregresivos, con el grado del polinomio autorregresivo igual a N , lo cual induce un efecto de fase porque no son simétricos. Es decir, el filtro de Butterworth $H_B(B)$ correspondiente a (5) es de la forma $H_B(B) = \frac{1}{\beta(B)}$, donde $\beta(B) = b_0 + b_1B + \dots + b_NB^N$ y $|G(x)|^2 = H_B(e^{-ix})H_B(e^{ix})$ es la ganancia al cuadrado del filtro. Se puede decir que el filtro de tendencia $H_p(B)$ correspondiente al filtro de Hodrick–Prescott es una forma “simetrizada” de un filtro de Butterworth, ya que es de la forma $H_p(B) = H_B(B)H_B(F)$.

El filtro que se propone en este trabajo es el filtro de Hodrick–Prescott con $\lambda = 68.738376$. Teniendo en cuenta lo anterior, es fácil comprobar que este filtro es el filtro de Butterworth AR(2) de ganancia mitad en $x_c = 2\pi/18$ “simetrizado”.

Referencias

1. Bell, W., (1984), "Signal Extraction for Nonstationary Series", *The Annals of Statistics*, **12**, 646-664.
2. Bengoechea, P. y Gómez, V., (1997), "TRAMO y SEATS: Una Nueva Metodología Para la Construcción de los Indicadores de Clima Industrial", *Boletín de Coyuntura Industrial* n° 13, Ministerio de Industria y Energía.
3. Burman, J.P., (1980), "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", *Journal of the Royal Statistical Society A*, **143**, 321-337.
4. Burns, A. M. y Mitchell, W. C., (1946), *Measuring Business Cycles*, New York, N.Y.: National Bureau of Economic Research, 1946.
5. Chow, G.C., y Lin., A. (1971), "Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution and Extrapolation of Time Series by Related Series", *Review of Economics and Statistics*, **53**, 372-375.
6. EUROSTAT (1996), "Is the ARIMA Model Adapted to Economic Time Series?" (Presentado en Informal Group on Seasonal Adjustment) EUROSTAT/D3/SA/04.
7. Gómez, V. y Melis, F., (1989), "Sobre los Filtros de Ciclo-tendencia Obtenidos por Descomposición de Modelos ARIMA", *Documento interno*, Instituto Nacional de Estadística.
8. Gómez, V., y Maravall, A., (1996), "Programs TRAMO and SEATS", Instructions for the User (Beta Version: September 1996), *Documento de Trabajo* n° 9628, Bank of Spain.
9. Hodrick, R. J. y Prescott, E. C. (1980), "Postwar U. S. business cycles: An empirical investigation", Discussion Paper No. 451, Carnegie-Mellon University.
10. Instituto Nacional de Estadística, (1992), "Nota Metodológica sobre la Contabilidad Nacional Trimestral", *Boletín Trimestral de Coyuntura del INE* n° 44, 9-28.

11. Instituto Nacional de Estadística, (1993), "Contabilidad Nacional Trimestral de España: Metodología y Serie Trimestral 1970-1992", Madrid.
12. Instituto Nacional de Estadística, (1995), "Señal de Ciclo-tendencia Frente al Ajuste Estacional en la Contabilidad Nacional Trimestral", *Boletín Trimestral de Coyuntura del INE* n° 55, 70-102.
13. Kohn, R., y Ansley, C.F., (1988), "Equivalence Between Bayesian Smoothness Priors and Optimal Smoothing for Function Estimations", en J. C. Spall (ed.), *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models*, Marcel Dekker, Inc., New York.
14. Maravall, A., (1987), "Descomposición de Series Temporales: Especificación, Estimación e Inferencia", *Estadística Española*, **29**, n° 114, 11-69.
15. Maravall, A., (1993), "Short-Term Analysis of Macroeconomic Time Series", *EUI Working Paper ECO*, No. 93/15, European University Institute, Florencia, Italia.
16. Melis, F., (1989), "Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización", *Revista Española de Economía*, **6**, n° 1 y 2.
17. Melis, F., (1992), "Agregación Temporal y Solapamiento o aliasing", *Estadística Española*, **34**, n° 130, 309-346.
18. Oppenheim, A. V. y Schaffer, R. W., (1989), *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, New Jersey.